

Dans cette séance on va voir

51

(i) exemple $\leftarrow$ application et lien avec matrices de passage

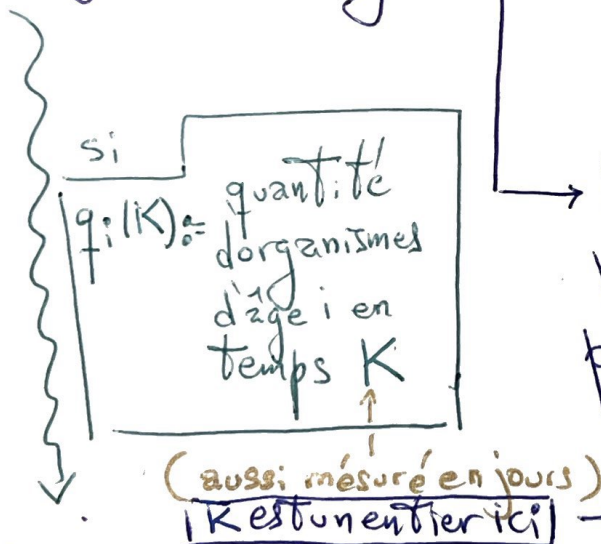
Un modèle de "population" simplifié

On étudie l'évolution d'une population d'organismes du même type dans le temps:

(1) chaque organisme a une durée de vie maximale de $N=3$ jours
 $\rightarrow$ on va noter l'âge d'un organisme avec $1 \leq i \leq N=3$

(2) si un organisme a âge i $\rightarrow$ la probabilité de survivre encore un jour est $p_{i+1 \leftarrow i}$ ($\in [0,1]$)

Alors



$\rightarrow$ la quantité d'organismes progéniteurs (vifs au premier jour) par un organisme d'âge i est r_i ($\in \mathbb{N}$)

$$\textcircled{A} \quad q_1(k+1) = r_1 \cdot q_1(k) + \dots + r_3 \cdot q_3(k), \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\textcircled{B} \quad q_i(k+1) = p_{i \leftarrow i-1} \cdot q_{i-1}(k), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall 1 < i \leq N=3$$

On pose maintenant

$$\vec{q}(k) = \begin{pmatrix} q_1(k) \\ q_2(k) \\ q_3(k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$\text{(en général)} \quad \vec{q}(k) = \begin{pmatrix} q_1(k) \\ \vdots \\ q_N(k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$$

Alors

$$\bar{q}(K+1) = \begin{pmatrix} q_1(K+1) \\ q_2(K+1) \\ q_3(K+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \cdot q_1(K) + r_2 \cdot q_2(K) + r_3 \cdot q_3(K) \\ p_{2 \leftarrow 1} \cdot q_1(K) \\ p_{3 \leftarrow 2} \cdot q_2(K) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ p_{2 \leftarrow 1} & 0 & 0 \\ 0 & p_{3 \leftarrow 2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1(K) \\ q_2(K) \\ q_3(K) \end{pmatrix}$$

$=: L$

$\bar{q}(K)$

$\forall K \in \mathbb{N}$

i.e.

$$\boxed{\bar{q}(K+1) = L \cdot \bar{q}(K)}$$

$\forall K \in \mathbb{N}$

⚠ pour que cela ait du sens il faut imposer $q_i(K) \geq 0, \forall i, \forall K$

en général, $\bar{q}(K+1) = L \cdot \bar{q}(K), \forall K$, pour

$$L := \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_{N-1} & r_N \\ p_{2 \leftarrow 1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_{3 \leftarrow 2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_{N \leftarrow N-1} & 0 \end{pmatrix} \quad \left. \vphantom{\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_{N-1} & r_N \\ p_{2 \leftarrow 1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_{3 \leftarrow 2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_{N \leftarrow N-1} & 0 \end{pmatrix}} \right\} N$$

Matrice de Leslie

Problème

On veut calculer $\bar{q}(K)$ pour $K \gg 1$ étant donné $\bar{q}(0)$.

(entier positif)

Comment faire?

On va faire un exemple "guidé"

52

On prend

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{q}(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Comment calculer $\vec{q}(K)$? $\sim$ Première idée : $\vec{q}(K) = L^K \cdot \vec{q}(0)$

Et comment calculer L^K avec $K \in \mathbb{N}$?

↓
Deuxième idée :
(formule de changement de base)

Si l'on a une base de vecteurs propres $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$

alors

$$L = P [T_L]_{\mathcal{B}} P^{-1}, \text{ avec } P := P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}_{can}}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} L^K &= \cancel{(P [T_L]_{\mathcal{B}} P^{-1})} \cdot \cancel{(P [T_L]_{\mathcal{B}} P^{-1})} \cdot \dots \cdot (P [T_L]_{\mathcal{B}} P^{-1}) \\ &= P \underbrace{[T_L]_{\mathcal{B}}^K}_{\substack{\nabla \\ \circ}} P^{-1} \quad \substack{\nabla \\ \circ} \quad \substack{\nabla \\ \circ} \end{aligned}$$

et cette matrice est diagonale

On commence le calcul :

[Etape 1] Calcul de valeurs propres

$$\det(L - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 7 & 6 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-\lambda) \cdot \lambda^2 - 7 \cdot (-\lambda) + 6 \cdot 1$$

$$= -\lambda^3 + 7\lambda + 6$$

Par critère de Gauss | on essaie avec les diviseurs de 6

Après
quelques
essais

$\lambda = -1, \lambda = -2, \lambda = 3$
sont les valeurs propres

Étape 2

$\lambda = -2$

$\underline{F}_{-2} = \text{Ker}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On calcule la FER

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 7L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

var libre

Donc

$$\underline{F}_{-2} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{matrix} x_1 = 4x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 4x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\boxed{\lambda = -1}$$

$$E_{-1} = \text{Ker} \left(\overbrace{A + I_3}^{A + I_3} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

53

On calcule la FER

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 7L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

var libre

Donc

$$E_{-1} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{array}{l} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{array} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\boxed{\lambda = 3}$$

$$E_3 = \text{Ker} \left(\overbrace{A - 3I_3}^{A - 3I_3} \begin{pmatrix} -3 & 7 & 6 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \right)$$

On calcule la FER

$$\begin{pmatrix} -3 & 7 & 6 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -3 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & -21 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 7L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

var libre

Donc

$$E_3 = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{array}{l} x_1 = 9x_3 \\ x_2 = 3x_3 \end{array} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

On pose $\left| \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right|$ (base de vecteurs propres)

$$\Rightarrow [T_L]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \checkmark$$

et

$$P = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 9 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & -3/5 \\ -1/4 & 1/4 & 3/2 \\ 1/20 & 3/20 & 1/10 \end{pmatrix}$$

Gauss-Jordan (exo)

Dans ce cas, pour $\bar{q}(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\bar{q}(k) = P \cdot \begin{pmatrix} (-2)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-2)^{k+2} & (-1)^{k+2} & 3^{k+2} \\ (-2)^{k+1} & (-1)^{k+1} & 3^{k+1} \\ (-2)^k & (-1)^k & 3^k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -4 \cdot (-2)^{k+2} + 7 \cdot (-1)^{k+2} + 3^{k+2} \\ -4 \cdot (-2)^{k+1} + 7 \cdot (-1)^{k+1} + 3^{k+1} \\ -4 \cdot (-2)^k + 7 \cdot (-1)^k + 3^k \end{pmatrix}$$

avec l'ordinateur

k	1	2	3	4	5	6	7	...
$a_k/4$	1	0	13	6	91	120	673	...

$\leftarrow a_k$